Capítulo 5

Integral de Funções Reais

5.1 A Integral Indefinida

Quando foi estudado a operação derivação, tinha-se que: "dada uma função f, desejava-se obter uma função g tal que $g = f'$ (ou seja, a função g era a derivada da função f)". Uma pergunta natural que surge é: "Será que existe uma operação inversa da função derivada?", em outras palavras: dada uma função g, será que é possível obter uma função f tal que $f' = g$? Essa pergunta que deseja-se responder. Antes, veja o exemplo a seguir.

Exemplo 5.1.1 *Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ a função definida por $g(x) = 6x^2$. Considere que exista uma função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f'(x) = g(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. Como g é uma função potência, segue das regras de derivação que a função f tem que ter grau uma unidade maior do que a função g e, por isso, tem-se que a função f possa ser da forma $f(x) = ax^3$, onde a é uma constante. Como $f' = g$, segue que:*

$$f'(x) = 3ax^2 = 6x^2 = g(x) \Rightarrow 3a = 6 \Rightarrow a = 2.$$

Portanto, uma função f que satisfaz a condição de que $f' = g$, sendo $g(x) = 6x^2$ é a função $f(x) = 2x^3$. □

Observação 5.1.1 *Oberve que a função $f(x) = 2x^3 + 1$ também satisfaz a condição de que $f' = g$, sendo $g(x) = 6x^2$. Na verdade, qualquer função da forma $f(x) = 2x^3 + a$, onde a é uma constante satisfaz a condição. Portanto, existem infinitas funções f que satisfazem a condição $f' = g$, sendo $g(x) = 6x^2$.*

Como visto, dada uma função g pode existir uma função f tal que $f' = g$, para todo x no domínio da g. Por isso, a operação Derivação tem uma operação inversa, da mesma forma que outra operações conhecidas: adição/subtração, multiplicação/divisão, potenciação/radiciação, etc. A operação inversa da derivação é chamada de Antiderivação, como apresentado a seguir

Definição 5.1.1 *Uma função F é chamada de Antiderivada de uma função f, num intervalo I se $F'(x) = f(x)$, para todo $x \in I$.*

A definição anterior diz que uma antiderivada de uma função f é qualquer função que a sua derivada coincide com a função f num determinado intervalo. Veja alguns exemplos.

Exemplo 5.1.2 1. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função dada por* $F(x) = 4x^3 + x^2 + 5$. *Então, tem-se que* F *é uma antiderivada da função* $f(x) = 12x^2 + 2x$ *em* $\mathbb{R}$.

   De Fato: *tem-se que* $F'(x) = (4x^3 + x^2 + 5)' = 12x^2 + 2x = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Portanto,* F *é uma antiderivada da função* f *em* $\mathbb{R}$.

2. *Seja* $G : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função dada por* $G(x) = 4x^3 + x^2 - 10$. *Então, tem-se que* G *é uma antiderivada da função* $f(x) = 12x^2 + 2x$ *em* $\mathbb{R}$.

   De Fato: *tem-se que* $G'(x) = (4x^3 + x^2 + 5)' = 12x^2 + 2x = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Portanto,* G *é uma antiderivada da função* f *em* $\mathbb{R}$.

3. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função dada por* $F(x) = 4x^3 + x^2 + k$, *onde* k *é uma constante. Então, tem-se que* F *é uma antiderivada da função* $f(x) = 12x^2 + 2x$ *em* $\mathbb{R}$.

   De Fato: *tem-se que* $F'(x) = (4x^3 + x^2 + k)' = 12x^2 + 2x = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Portanto,* F *é uma antiderivada da função* f *em* $\mathbb{R}$.

4. *Seja* $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *uma função dada por* $F(x) = \cos(2x)$. *Então, tem-se que* F *é uma antiderivada da função* $f(x) = -2sen(2x)$.

   De Fato: *tem-se que* $F'(x) = (\cos(2x))' = -\sin(2x) \times (2x)' = -2sen(2x) = f(x)$, $\forall\ x \in \mathbb{R}$. *Portanto,* F *é uma antiderivada da função* f *em* $\mathbb{R}$. $\square$

Do que foi visto até aqui você pode ter percebido que se duas funções F e G são antiderivadas de uma mesma função f, então as duas funções se diferenciam apenas no valor da constante. Na verdade, esse fato é uma regra geral que é garantido pelo resultado a seguir.

Teorema 5.1.1 *Se* f *e* g *são duas funções tais que* $f'(x) = g'(x)$, $\forall\ x \in I$, *então existe uma constante* k *tal que* $f(x) = g(x) + k$, $\forall\ x \in I$.

Demonstração: Tome a função h, definida por $h(x) = f(x) - g(x)$, para todo $x \in I$. Então, temos que $h'(x) = (f(x) - g(x))' = f'(x) - g'(x) = 0$, para todo $x \in I$. Como a derivada da função h é a função nula, para todo elemento do domínio, segue que a função h é uma constante, visto que, $h'(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = k$ (k é uma constante), para todo $x \in I$. Portanto, $f(x) = g(x) + k$, onde k é uma constante. $\square$

Uma conseguencia desse teorema está relacionada com o conhecimento de uma antiderivada particular, visto que se você conhece uma antiderivada qualquer outra é obtida a partir dessa, visto que as antiderivadas de uma função se diferencial apenas no valor da constante.

Corolário 5.1.1 *Se* F *é uma antiderivada particular de* f *num intervalo* I, *então toda antiderivada de* f *em* I *é da forma* $F(x) + k$, *com* k *sendo uma constante.*

Demonstração: Seja G uma antiderivada arbitrária de f no intervalo I. Então, tem-se que $G'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$. Como $F'(x) = f(x)$, $\forall\ x \in I$, segue do Teorema 5.1.1 que $G(x) = F(x) + k$ (k constante), para todo $x \in I$. □

A operação antiderivação, que é denotada por $\int$, é o processo de obter o conjunto de todas as antiderivadas de uma função f. Dessa forma, como $d(F(x))$ (diferencial da função F) pode ser substituído por $f(x)dx$ (regra da cadeia), segue que a antiderivação pode ser assim representada:

Definição 5.1.2 *Integração é o processo de encontrar todas as antiderivadas (ou primitivas) de uma função. Simbologia:*

$$\int f(x)dx = F(x) + k,\ k \text{ constante e } F'(x) = f(x). \tag{5.1}$$

A expressão $\int f(x)dx$ *é chamada de Integral Indefinida da função* f*, a função* f *é chamada de Integrando e* dx *é o diferencial de* x*.*

Como a antiderivação é uma operação inversa da derivação, muitas das propriedades da antiderivada são consequência das propriedades das derivadas, como visto a seguir.

Teorema 5.1.2 *Sejam* a *e* a_i, $i \in \mathbb{N}$, *constantes e* $f : A \longrightarrow B$ *e* $f_i : A \longrightarrow B$, $i \in \mathbb{N}$, *funções definidas num mesmo domínio. Então, tem-se que:*

1. $\int dx = x + k$, *onde* k *é uma constante.*
2. *A diferencial de uma antiderivada é a própria função* f*, isto é,* $d\left(\int f(x)dx\right) = f(x)$.
3. *Para* n *constante e* $n \neq -1$, *tem-se que* $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + k$, *onde* k *é uma constante.*
4. $\int af(x)dx = a\int f(x)dx$.
5. $\int (f_1(x) + f_2(x))dx = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx$.
6. *Generalizando:*
$$\int (a_1 f_1(x) + \cdots + a_n f_n(x))dx = a_1 \int f_1(x)dx + \cdots + a_n \int f_n(x)dx.$$

Demonstração:

1. Tem-se que $dx = 1 \times dx$, então como a função $G(x) = x$ é uma antiderivada particular da função $g(x) = 1$, segue do Corolário 5.1.1 que $\int dx = G(x) + k = x + k$, com k sendo uma constante.
2. Seja F uma antiderivada da função f, então tem-se que $\int f(x)dx = F(x) + k$, onde k é uma constante. Assim,
$$d\left(\int f(x)dx\right) = (F(x) + k)' = F'(x) = f(x).$$

3. Considere $F(x) = \dfrac{x^{n+1}}{n+1}$ e $f(x) = x^n$. Então, tem-se que $F'(x) = (n+1) \times \dfrac{x^n}{n+1} = x^n = f(x)$, ou seja, a função F é uma antiderivada particular da função f. Portanto, segue do Corolário 5.1.1 que $\int x^n dx = \dfrac{x^{n+1}}{n+1} + K$, com k sendo uma constante.

4. Seja F uma antiderivada de f, então tem-se que $\int f(x)dx = F(x) + k$. Além disso, das regras de derivação, segue que aF é uma antiderivada para a função af, visto que F é uma antiderivada para a função f (De fato: $(aF(x))' = a(F(x))' = af(x)$). Então, tem-se que $\int af(x)dx = aF(x) + k$, onde a é uma constante. Assim, tem-se que:

$$a \int f(x)dx = a(F(x)+k) = aF(x)+a \times k = aF(x)+K = \int af(x)dx.$$

5. Sejam F_1 e F_2 antiderivadas das funções f_1 e f_2, respectivamente. Dessa forma, a função $F_1 + F_2$ é uma antiderivada da função $f_1 + f_2$, visto que $(F_1 + F_2)' = F_1' + F_2' = f_1 + f_2$. Assim:

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = (F_1 + F_2) + k = F_1 + F_2 + k_1 + k_2,$$

onde $k = k_1 + k_2$. Portanto,

$$\int (f_1(x) + f_2(x))dx = (F_1 + k_1) + (F_2 + k_2) = \int f_1(x)dx + \int f_2(x)dx.$$

6. Aplique os dois últimos resultados repetidamente.

$\square$

Vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.1.3

- *Sendo* $f(x) = 3x + 5$, *tem-se que*

$$\int f(x)dx = \int (3x + 5)dx = 3 \int xdx + 5 \int dx = 3\frac{x^2}{2} + 5x.$$

- *Sendo* $g(x) = 5x^4 - 8x^3 + 9x^2 - 2x + 7$, *tem-se que*

$$\int g(x)dx = 5 \int x^4 dx - 8 \int x^3 dx + 9 \int x^2 dx - 2 \int xdx + 7 \int dx + k =$$

$$5\frac{x^5}{5} - 8\frac{x^4}{4} + 9\frac{x^3}{3} - 2\frac{x^2}{2} + 7x + k = x^5 - 2x^4 + 3x^3 - x^2 + 7x + k.$$

- *Sendo* $h(x) = \sqrt[3]{x^2}$, *tem-se que*

$$\int h(x)dx = \int x^{\frac{2}{3}} dx = \frac{x^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + k = \frac{x^{\frac{5}{3}}}{\frac{5}{3}} + k = \frac{3x^{\frac{5}{3}}}{5} + k.$$

- *Seja* $f(t) = \frac{5t^2+5}{t^{\frac{4}{3}}}$*. Então, a integral indefinida da função* f *é dada por:*

$$\int f(t)dt = 5\int \frac{t^2}{t^{\frac{4}{3}}}dt + 7\int \frac{dt}{t^{\frac{4}{3}}} = 5\int t^{\frac{2}{3}}dt + 7\int t^{\frac{-4}{3}}dt =$$

$$= 5\frac{t^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + 7\frac{t^{\frac{-4}{3}+1}}{\frac{-4}{3}+1} + k = 3t^{\frac{5}{3}} - 21t^{\frac{-1}{3}} + k.$$

□

Exemplo 5.1.4 *Encontre a solução da equação diferencial* $f'(x) = 6x^2 + x - 5$ *com a condição de contorno* $f(0) = 2$*.*

Solução: Resolver a equação diferencial é equivalente a encontrar a integral indefinida da função f, visto que $\int f'(x)dx = f(x)$. Assim:

$$\int f'(x)dx = 6\int x^2dx + \int xdx - 5\int dx + k = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + k.$$

Para aplicar a condição de contorno, tem-se que $f(0) = 2 \Leftrightarrow 2\times 0^3 + \frac{0^2}{2} - 5\times 0 + k = 2 \Leftrightarrow k = 2$. Portanto, a solução da equação diferencial que satisfaz a condição de contorno é

$$f(x) = 2x^3 + \frac{x^2}{2} - 5x + 2.$$

□

Exemplo 5.1.5 *Uma partícula em movimento retilíneo possui uma aceleração* a*, em cada instante* t*, dada por* $a(t) = 12t - 4$*. Sabendo que as condições iniciais são* $s(0) = 8$ *e* $v(0) = 15$*, obtenha a função posição da partícula.*

Solução: Para uma partícula P em movimento retilíneo, a função velocidade é obtida como sendo a taxa de variação (derivada) da função posição, isto é, $v(t) = s'(t)$. Além disso, a função velocidade é obtida como sendo a taxa de variação (derivada) da função velocidade, isto é, $a(t) = v'(t)$. Em outras palavras: a função velocidade é a antiderivada da função aceleração e a função posição é a antiderivada da função velocidade.
Dessa forma, como a integral indefinida da função a é

$$v(t) = \int a(t)dt = \int (12t-4)dt = \frac{12t^2}{2} + 4t + k = 6t^2 - 4t + k,$$

segue da condição inicial $v(0) = 8$ que $6\times 0^2 - 4\times 0 + k = 8 \Leftrightarrow k = 8$. Logo, a função velocidade é dada por

$$v(t) = 6t^2 - 4t + 8.$$

Como a integral indefinida da função velocidade é a função posição, segue que

$$s(t) = \int v(t)dt = 6\frac{t^3}{3} - 4\frac{t^2}{2} + 8t + k_1 = 2t^3 - 2t^2 + 8t + k_1.$$

Novamente, aplicando a condição inicial $s(0) = 15$, segue que:

$$2 \times 0^3 - 2 \times 0^2 + 8 \times 0 + k_1 = 15 \Leftrightarrow k_1 = 15.$$

Portanto, a função posição da partícula é

$$s(t) = 2t^3 - 2t^2 + 8t + 15.$$

□

É muito comum usar funções trigonométricas no cálculo de integrais indefinidas. O uso das identidades trigonométricas podem facilitar na obtenção da integral. Algumas dessas identidades é apresentada na observação a seguir.

Observação 5.1.2 *1.* $sen^2(x) + \cos^2(x) = 1$;

2. $\tan^2(x) + 1 = \sec^2(x)$;

3. $1 + \cot^2(x) = cossec^2(x)$;

4. $\tan(x) = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}$ *e* $\cot(x) = \dfrac{\cos(x)}{sen(x)}$;

5. $sen(x)cossec(x) = 1$, $\cos(x)\sec(x) = 1$ *e* $\tan(x)\cot(x) = 1$;

6. $sen(x \pm y) = sen(x)\cos(y) \pm sen(y)\cos(x)$;

7. $\cos(x \pm y) = \cos(x)\cos(y) \mp sen(x)sen(y)$.

Com as identidades trigonométricas apresentadas na Observação 5.1.2 e um pouco de imaginação, é possível demonstrar cada uma das propriedades a seguir.

Teorema 5.1.3 *Considere k como sendo uma constante. Então são validas cada uma das propriedades a seguir.*

1. $\int sen(x)dx = -\cos(x) + k$.

2. $\int \cos(x)dx = sen(x) + k$.

3. $\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + k$.

4. $\int cossec^2(x)dx = -\cot(x) + k$.

5. $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + k$;

6. $\int cossec(x)\cot(x)dx = -cossec(x) + k$;

Demonstração:

1. Tem-se que $d(\cos(x)) = -sen(x)dx$. Então, a função $F(x) = -\cos(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = sen(x)$. Portanto, do Corolário 5.1.1 segue que $\int sen(x)dx = -\cos(x) + k$.

2. Tem-se que $d(sen(x)) = \cos(x)dx$. Então, a função $G(x) = sen(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = \cos(x)$. Portanto, do Corolário 5.1.1 segue que $\int \cos(x)dx = sen(x) + k$.

3. Tem-se que $d(\tan(x)) = d\left(\dfrac{sen(x)}{\cos(x)}\right) = \dfrac{d(sen(x))\cos(x) - sen(x)d(\cos(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{cos^2(x) + sen^2(x)}{\cos^2(x)}dx = \dfrac{1}{\cos^2(x)}dx = \sec^2(x)dx$. Logo, a função $H(x) = \tan(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = \sec^2(x)$. Portanto, do Corolário 5.1.1 segue que $\int \sec^2(x)dx = \tan(x) + k$.

4. Tem-se que $d(\cot(x)) = d\left(\dfrac{\cos(x)}{sen(x)}\right) = \dfrac{d(\cos(x))sen(x) - \cos(x)d(sen(x))}{sen^2(x)} = \dfrac{-sen^2(x) - \cos^2(x)}{sen^2(x)}dx = \dfrac{-1}{sen^2(x)}dx = -cossec^2(x)dx$. Logo, a função $F(x) = \cot(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = -cossec^2(x)$. Portanto, do Corolário 5.1.1 segue que $\int cossec^2(x)dx = -\cot(x) + k$.

5. Tem-se que $d(\sec(x)) = d\left(\dfrac{1}{\cos(x)}\right) = \dfrac{d(1)\cos(x) - 1d(\cos(x))}{\cos^2(x)} = \dfrac{0 + sen(x)}{\cos^2(x)}dx = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)}\dfrac{1}{\cos(x)}dx = \tan(x)\sec(x)dx$. Logo, a função $F(x) = \sec(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = \tan(x)\sec(x)$. Portanto, do Corolário 5.1.1 segue que $\int \sec(x)\tan(x)dx = \sec(x) + k$.

6. Tem-se que $d(cossec(x)) = d\left(\dfrac{1}{sen(x)}\right) = \dfrac{d(1)sen(x) - 1d(sen(x))}{sen^2(x)} = \dfrac{0 - \cos(x)}{sen^2(x)}dx = -\dfrac{\cos(x)}{sen(x)}\dfrac{1}{sen(x)}dx = -\cot(x)cossec(x)dx$. Logo, a função $F(x) = cossex(x)$ é uma primitiva da função $f(x) = -\cot(x)cossec(x)$. Portanto, do Corolário 5.1.1 segue que $\int cossec(x)\cot(x)dx = -cossec(x) + k$.

□

Agora vamos a outros exemplos.

Exemplo 5.1.6 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

1. $\int (3\sec(x)\tan(x) - 5cossec^2(x))\,dx$;

2. $\displaystyle\int \frac{2\cot(x) - 3sen^2(x)}{sen(x)}dx$;

3. $\int (\tan^2(x) + \cot^2(x) + 4)\,dx$.

Solução:

- Tem-se que

$$\int \left(3\sec(x)\tan(x) - 5cossec^2(x)\right)dx = 3\int sec(x)\tan(x)dx - 5\int cossec^2(x)dx =$$

$$= 3\sec(x) + 5\cot(x) + k,$$

onde k é uma constante.

- Tem-se que

$$\int \frac{2\cot(x) - 3sen^2(x)}{sen(x)}dx = 2\int \frac{\cot(x)}{sen(x)}dx - 3\int sen(x)dx =$$

$$= 2\int \cot(x)cossec(x)dx - 3\int sen(x)dx = -2cossec(x) + 3cos(x) + k,$$

onde k é uma constante.

- Tem-se que

$$\int \left(\tan^2(x) + \cot^2(x) + 4\right)dx = \int \left((\sec^2(x) - 1) + (cossec^2(x) - 1) + 4\right)dx =$$

$$= \int \sec^2(x)dx + \int cossec^2(x)dx + 2\int dx = \tan(x) - \cot(x) + 2x + k,$$

onde k é uma constante.

$\square$

Exemplo 5.1.7 *Em qualquer ponto (x, y) de uma curva C, a reta tangente tem inclinação igual a $y = 4sen(x) - 6cos(x)$.. Se a curva contém o ponto $\left(\frac{\pi}{6}, 0\right)$, ache a equação ca curva C.*

Solução: A inclinação da reta tangente de uma curva, em qualquer um dos seus pontos (x, y) é igual ao valor da derivada desse ponto. Assim, como $y' = C'(x)$, segue que

$$y = \int C'(x)dx = \int (4sen(x) - 6cos(x))dx = 4\int sen(x)dx - 6\int cos(x)dx =$$

$$= -4\cos(x) - 6sen(x) + k.$$

Como o ponto $\left(\frac{\pi}{6},\right)$ pertence a curva, segue que:

$$0 = y = C\left(\frac{\pi}{6}\right) = -4\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) - 6sen\left(\frac{\pi}{6}\right) + k = -2\sqrt{3} - 3 + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = 2\sqrt{3} + 3.$$

Portanto, a equação da curva C é dada por

$$C : y = -4\cos(x) - 6sen(x) + 2\sqrt{3} + 3.$$

$\square$

Muitas antiderivadas não podem ser obtidas diretamente com a aplicação dos resultados até aqui apresentados. Por isso é necessário a inclusão de algumas técnicas para auxiliar nesses cálculos. A primeira dessas regras é a Regra da Cadeia para integrais.

Teorema 5.1.4 *Seja g uma função diferenciável e seja o intervalo I a imagem de g. Suponha que f seja uma função definida em I e que F seja uma antiderivada de f em I. Então*

$$\int f(g(x))[g'(x)]dx = F(g(x)) + k,$$

onde k é uma constante.

Demonstração: Por hipótese, tem-se que $F'(u) = f(u)$. Logo, $F'(g(x)) = f(g(x))$. Pela regra da cadeia para derivação, segue que

$$d_x(F(g(x))) = F'(g(x)) \times g'(x) = f(g(x)) \times g'(x).$$

Daí, tem-se que

$$\int f(g(x))[g'(x)]dx = F(g(x)) + k$$

onde k é uma constante. □

Uma consequência do Teorema 5.1.4 é a fórmula da potência generalizada para antiderivadas.

Corolário 5.1.2 *Se g é uma função diferenciável e se n é um número racional diferente de -1 então, tem-se que:*

$$\int [g(x)]^n[g'(x)]dx = \frac{g(x)]^{n+1}}{n+1} + k,$$

onde $n \neq -1$ e k constante.

Demonstração: Considere a função f como sendo a função $f(u) = u^n$, faça a composição $f(g(x))$ e aplique o Teorema 5.1.4. □

Agora vamos a alguns exemplos.

Exemplo 5.1.8 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

1. $\int \sqrt{3x+4}dx$.
2. $\int x^2(5+2x^3)^8dx$.
3. $\int sen(5x)dx$.
4. $\int x^2 \sec^2(3x^3)dx$.
5. $\displaystyle\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}dx$.

Solução:

1. Para aplicar o Teorema 5.1.4, é preciso definir uma função f e uma função g tal que $f(g(x))[g'(x)]dx = \sqrt{3x+4}dx$. Assim, conhecendo uma antiderivada da função f segue a solução da integral. Para esse caso, se $f(u) = \sqrt{u}$ e $g(x) = 3x+4$, segue que $g'(x)dx = (3x+4)'dx = 3dx$ e que $f(g(x)) = \sqrt{3x+4}$. Assim, como uma antiderivada para a função f é dada por $\dfrac{2\sqrt[2]{u^3}}{3} + k$, segue que

$$\int \sqrt{3x+4}dx = \int f(g(x))\frac{1}{3}(3dx) = \frac{1}{3}\int f(g(x))[g'(x)]dx =$$

$$= \frac{1}{3}\frac{2\sqrt{(3x+4)^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{(3x+4)^3}}{9} + k.$$

2. Novamente, é preciso definir uma função f e uma função g tal que $f(g(x))[g'(x)]dx = x^2(5+2x^3)^8dx$. Considere a função $f(u) = u^8$ e a função $g(x) = 5+2x^3$ então, a função $g'(x)dx = (5+2x^3)'dx = 6x^2dx$. Assim, como uma primitiva para a função f é a função $\dfrac{u^9}{9}$, segue que

$$\int x^2(5+2x^3)^8dx = \int f(g(x))\left[\frac{[g'(x)dx]}{6}\right] = \frac{1}{6}F(g(x)) + k \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int x^2(5+2x^3)^8dx = \frac{1}{6}\frac{(5+2x^3)^9}{9} + k = \frac{(5+2x^3)^9}{54} + k.$$

3. Para esse exemplo, considere a função $f(u) = sen(u)$ e a função $g(x) = 5x$ então, tem-se que $f(g(x)) = sen(5x)$ e que $g'(x)dx = (5x)'dx = 5dx$. Assim, como a função $F(u) = -\cos(u) + k$ é uma primitiva para a função f, segue que

$$\int sen(5x)dx = \int f(g(x))\left[\frac{[g'(x)dx]}{5}\right] = -\frac{1}{5}\cos(5x) + k.$$

4. Considere a função $f(u) = \sec^2(u)$ e a função $g(x) = 3x^3$ então, tem-se que $f(g(x)) = \sec^2(3x^3)$ e que $g'(x)dx = (3x^3)'dx = 9x^2dx$. Assim, como a função $F(u) = \tan(x) + k$ é uma primitiva para a função f, segue que

$$\int x^2\sec^2(3x^3)dx = \int f(g(x))\left[\frac{[g'(x)dx]}{9}\right] = \frac{1}{9}\tan(3x^3) + k.$$

5. Considere a função $f(u) = \dfrac{1}{u^4}$ e a função $g(x) = 1-8x^3$ então, tem-se que $f(g(x)) = \dfrac{1}{(1-8x^3)^4}$ e que $g'(x)dx = (1-8x^3)'dx = -24x^2dx$. Assim, como a função $F(u) = -\dfrac{1}{3u^3} + k$ é uma primitiva para a função f, segue que

$$\int \frac{4x^2}{(1-8x^3)^4}dx = \int f(g(x))\left[\frac{[g'(x)dx]}{-6}\right] = -\frac{1}{18(1-8x^3)^3} + k.$$

$\square$

Outra técnica que pode ser utilizada para resolver uma integral indefinida é fazer uma mudança de variável, como nos exemplos a seguir.

Exemplo 5.1.9 *Calcule cada uma das integrais a seguir.*

1. $\int x^2\sqrt{1+x}dx$.
2. $\displaystyle\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$.
3. $\int sen(x)\sqrt{1-\cos(x)}dx$.
4. $\int \tan(x)\sec^2(x)dx$.

Solução:

1. Considere a mudança de variável dada por $u = 1 + x$. Então, tem-se que $du = (1+x)'dx = dx$ e, além disso, $x = u - 1 \Rightarrow x^2 = (u-1)^2 = u^2 - 2u + 1$. Assim,

$$\int x^2\sqrt{1+x}dx = \int (u^2 - 2u + 1)\sqrt{u}du = \int \left(u^{\frac{5}{2}} - 2u^{\frac{3}{2}} + u^{\frac{1}{2}}\right) du =$$

$$= \frac{u^{\frac{7}{2}}}{\frac{7}{2}} - \frac{2u^{\frac{5}{2}}}{\frac{5}{2}} + \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2u^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4u^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2u^{\frac{3}{2}}}{3} + k.$$

Substituindo u por $1 + x$, chega-se em:

$$\int x^2\sqrt{1+x}dx = \frac{2(1+x)^{\frac{7}{2}}}{7} - \frac{4(1+x)^{\frac{5}{2}}}{5} + \frac{2(1+x)^{\frac{3}{2}}}{3} + k.$$

2. Considere a mudança dada por $u = \sqrt{x}$. Dessa forma, segue que $du = (\sqrt{x})'dx = (x^{\frac{1}{2}})'dx = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}dx = \frac{dx}{2\sqrt{x}} \Rightarrow 2du = \frac{dx}{\sqrt{x}}$. Então,

$$\int \frac{sen(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx = \int sen(\sqrt{x}) \times \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int sen(u) \times 2du =$$

$$= 2\int sen(u)du = -\cos(u) + k = -2\cos(\sqrt{x}) + k.$$

3. Considere a mudança de variável dada por $u = 1 - \cos(x)$. Daí, segue que $d(u) = (1 - \cos(x))'dx = sen(x)dx$. Assim,

$$\int sen(x)\sqrt{1-\cos(x)}dx = \int \sqrt{1-\cos(x)} \times sen(x)dx = \int \sqrt{u}du =$$

$$= \frac{u^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} + k = \frac{2\sqrt{(u)^3}}{3} + k = \frac{2\sqrt{(1-\cos(x))^3}}{3} + k.$$

4. Como $\int \tan(x)\sec^2(x)dx = \dfrac{sen(x)}{\cos(x)} \times \dfrac{1}{\cos^2(x)} = \dfrac{sen(x)}{\cos^3(x)}$, considere $u = \cos(x)$ e, consequentemente, $du = (\cos(x))'dx = -sen(x)dx \Rightarrow -du = sen(x)dx$. Assim,

$$\int \tan(x)\sec^2(x)dx = \int \frac{sen(x)}{\cos^3(x)}dx = \int \frac{1}{\cos^3(x)} \times sen(x)dx = -\int \frac{du}{u^3} =$$

$$= -\frac{-1}{2u^2} + k = \frac{1}{2\cos^2(x)} + k = \frac{\sec^2(x)}{2} + k.$$

□

É importante ressaltar que, muitas vezes, existem mais de uma maneira de fazer a mudança de variável. Por exemplo, para o item 4 do Exemplo 5.1, se tivesse sido considerada a mudança de variável $u = \tan(x)$, segue que $du = (\tan(x))'dx = \sec^2(x)dx$ e, consequentemente,

$$\int \tan(x)\sec^2(x)dx = \int u du = \frac{u^2}{2} + k = \frac{\tan^2(x)}{2} + k.$$

As respostas obtidas não parecem as mesmas. Contudo, um pouco de imaginação pode mostrar que esse pensamento está equivocado. Das identidades trigonométricas temos que $\dfrac{\tan^2(x)+1}{2} = \dfrac{\sec^2(x)}{2} \Rightarrow \dfrac{\tan^2(x)}{2} = \dfrac{\sec^2(x)-1}{2}$. Fazendo a mudança na equação, chega-se a:

$$\frac{\tan^2(x)}{2} + k = \frac{\sec^2(x)-1}{2} + k = \frac{\sec^2(x)}{2} + \left(\frac{-1}{2} + k\right) = \frac{\sec^2(x)}{2} + \widehat{k},$$

que é a mesma resposta obtida com a outra mudança de variável.
Agora, faça alguns exercícios para fixar os conceitos aqui aprendidos. Eles serão importantes para as próximas seções.

5.2 Exercício

Exercício 5.2.1 *Efetue a antiderivação em cada uma das funções abaixo.*

(a) $\int 3x^4 dx$; **(b)** $\int 2t^7 dt$; **(c)** $\int \dfrac{1}{x^3}dx$;

(d) $\int 5x^{\frac{3}{2}}dx$; **(e)** $\int 10\sqrt[3]{y^2}dy$; **(f)** $\int (4\text{cossec } x\text{cotg } x + 2\sec^2 x)dx$;

(g) $\int 6x^2\sqrt[3]{x}dx$; **(h)** $\int (4x^3 + x^2)dx$; **(i)** $\int x^3(2x^2 - 3)dx$;

(j) $\int (ax^2+bx+c)dx$; **(k)** $\int \left(\dfrac{2}{x^3} + \dfrac{3}{x^2} + 5\right)dx$; **(l)** $\int \dfrac{x^2+4x+4}{\sqrt{x}}dx$;

(m) $\int (3\text{sen } t - 2\cos t)dt$; **(n)** $\int \dfrac{\text{sen } x}{\cos^2 x}dx$; **(o)** $\int \dfrac{2}{\sqrt[3]{x}}dx$;

(p) $\displaystyle\int \sqrt{1-4y}\ dy;$ **(q)** $\displaystyle\int \sqrt[3]{6-2x}\ dx;$ **(r)** $\displaystyle\int x\sqrt{x^2-9}\ dx;$

(s) $\displaystyle\int x^2(x^3-1)^{10}\ dx;$ **(t)** $\displaystyle\int 5x\sqrt[3]{(9-4x^2)^2}\ dx;$ **(u)** $\displaystyle\int \frac{y^3}{(1-2y^4)^5}\ dy;$

(v) $\displaystyle\int (x^2-4x+4)^{\frac{4}{3}}\ dx;$ **(x)** $\displaystyle\int x\sqrt{x+2}\ dx;$ **(y)** $\displaystyle\int \frac{2r}{(1-r)^7}\ dr;$

(w) $\displaystyle\int \sqrt{3-2x}\ x^2dx;$ **(z)** $\displaystyle\int \cos(4\theta)\ d\theta;$ **(a1)** $\displaystyle\int 6x^2\text{sen}(x^3)\ dx;$

(b1) $\displaystyle\int \sec^2(5x)\ dx;$ **(c1)** $\displaystyle\int y\text{cossec}(3y^2)\text{cotg}(3y^2)\ dy;$; **(d1)** $\displaystyle\int \sqrt{1+\frac{1}{3x}}\ \frac{dx}{x^2};$

(e1) $\displaystyle\int \cos^2 t\ \text{sen}t\ dt;$ **(f1)** $\displaystyle\int \frac{\cos 3x}{\sqrt{1-2\text{sen}3x}}\ dx;$ **(g1)** $\displaystyle\int \text{sen}x\ \text{sen}(\cos x)\ dx.$

Exercício 5.2.2 *Lança-se uma pedra verticalmente para cima, de um ponto situado a* $144m$ *acima do solo, com uma velocidade de* $96m/s$*. Desprezando-se a resistência do ar, determine a distância acima do solo alcançada após t segundos. Durante quanto tempo a pedra sobe? Quando e com que velocidade a pedra atinge o solo de volta?*

Exercício 5.2.3 *Uma pedra é atirada verticalmente para cima, partindo-se do solo, com uma velocidade inicial dde* $20m/s$*. Se a única força considerada for aquela atribuída à aceleração devido à gravidade, encontre o tempo que a pedra levará para atingir o chão. Qual a velocidade com que a pedra atinge o chão? Qual a altura máxima atingida pela pedra?*

Exercício 5.2.4 *Um ponto descreve um movimento retilíneo, tal que* $a(t) = 2-6t$*. Se as condições iniciais são* $v(0) = -5$ *e* $s(0) = 4$*, determine* $s(t)$*.*

Exercício 5.2.5 *Um objeto descreve um movimento retilíneo, tal que* $a(t) = 4t^2-8t+\cos(t)$*. Se as condições iniciais são* $v(0) = -1$ *e* $s(0) = 2$*, determine* $s(t)$*.*

Exercício 5.2.6 *Um determinada empresa estima que o custo marginal, em reais, para produzir x unidades de uma determinada peça é* $CM(x) = 0.05 + 0.0002x$*. Sabendo que o custo marginal é dada pela taxa de variação da função custo e que o custo marginal, para a produção* 1000 *dessas peças, é* 0.25 *centavos, determine o custo da produção.*

Exercício 5.2.7 *Um ferimento está cicatrizando de tal forma que t dias a partir de segunda feira, a área da ferida decresce a uma taxa de* $-3(t+2)^{-2}\ cm^2$ *por dia. Se na terça-feira a área do ferimento for de* $2cm^2$*, qual teria sido a sua área na segunda-feira? Além disso, qual a área prevista na sexta-feira, se o ferimento continuar a cicatrizar na mesma taxa?*

Exercício 5.2.8 *Encontre a solução completa da equação diferencial* $y'' = 4x+3$*.*

Exercício 5.2.9 *Qual a solução da equação diferencial* $y'' = -2x+4sen(x)$*, sabendo que* $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$ *e* $y'(0) = -1$*.*